



31^o
OSIICUSP



Explorando 'Toy Models' do Big-Bang Baseados em Mecânica Newtoniana Clássica de N-Corpos

Exploring Big Bang toy models based on N-body classical newtonian mechanics

Octavio Augusto Potalej
Eduardo Colli (Orientador)

IME - USP

oapotalej@usp.br



Problema de N-corpos com choques

Sejam $m_a \in \mathbb{R}$ as massas e $\mathbf{r}_a : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, B aberto, as posições das $1 \leq a \leq N$ partículas dispostas no vácuo, unicamente sob ação da gravidade dada por

$$\mathbf{F}_a = - \sum_{b \neq a} G m_a m_b \frac{\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a}{r_{ab}^3}, \quad r_{ab} = \|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a\|. \quad (1)$$

Seja $t_0 \in B$ o instante inicial. O sistema

$$\begin{cases} m_a \ddot{\mathbf{r}}_a(t) = \mathbf{F}_a(t) \\ (\mathbf{r}_a(t_0), \dot{\mathbf{r}}_a(t_0)) \in B \times \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (2)$$

é chamado de *Problema de N-corpos*.

Para evitar singularidades, utilizamos choques perfeitamente elásticos.

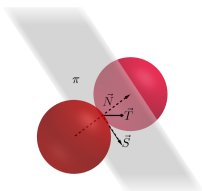


Figura: Choque perfeitamente elástico.

Integrais primeiras e condições iniciais

Integrais primeiras do problema de N-corpos

- 1 Energia total: $E = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \|\dot{\mathbf{r}}_a\|^2 + V$, onde V é o potencial;
- 2 Momento linear total: $\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N m_a \dot{\mathbf{r}}_a = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a$;
- 3 Centro de massas: $\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_a$, $M = \sum_{a=1}^N m_a$;
- 4 Momento angular total: $\mathbf{J} = \sum_{a=1}^N \langle \mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a \rangle$.

Consideramos o caso $E = 0$, $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_{cm} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.

Condicionando valores iniciais

- Anular E : $\dot{\mathbf{r}}_a \mapsto \dot{\mathbf{r}}_a \sqrt{-V/(E - V)}$;
- Anular \mathbf{r}_{cm} : $\mathbf{r}_a \mapsto \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{cm}$;
- Anular \mathbf{P} : $\dot{\mathbf{r}}_a \mapsto \dot{\mathbf{r}}_a - \frac{1}{M} \sum_{a=1}^N m_a \dot{\mathbf{r}}_a$;
- Anular \mathbf{J} : $\dot{\mathbf{r}}_a \mapsto \dot{\mathbf{r}}_a + \mathbf{r}_a \times \omega$, para ω solução de $\mathbf{l}_{tot}\omega = -\mathbf{J}$.

Integração numérica

Runge-Kutta de Quarta Ordem

Sejam $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ e $\mathbf{F}(t) = [\mathbf{F}_i(t)]_{1 \leq i \leq N}$. Tem-se:

$$\mathbf{p}(t+h) = \mathbf{p}(t) + h\mathbf{F}(t), \quad \mathbf{r}_a(t+h) = \mathbf{r}_a(t) + \frac{h}{6}(\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4),$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{m_a}\mathbf{p}_a(t), \quad \kappa_2 = \kappa_1 + \frac{h}{2m_a}\kappa_1, \quad \kappa_3 = \kappa_1 + \frac{h}{2m_a}\kappa_2, \quad \kappa_4 = \kappa_1 + \frac{h}{m_a}\kappa_3.$$

Velocity Verlet

$$\mathbf{r}_a(t+h) = \mathbf{r}_a(t) + \frac{h}{m_a}\mathbf{p}_a(t) + \frac{h^2}{2m_a}\mathbf{F}_a(t),$$

$$\mathbf{p}_a(t+h) = \mathbf{p}_a(t) + \frac{h}{2m_a}(\mathbf{F}_a(t) + \mathbf{F}_a(t+h)).$$

Correção numérica

Corretor conservativo

Considere um sistema conservativo $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$, $t \in I$ intervalo aberto, com valor inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $t_0 \in I$. Seja o vetor de k integrais primeiras do sistema $\Psi(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_k(\mathbf{x}))$ e sua matriz jacobiana $\mathbf{J}\Psi(\mathbf{x})$. Seja \mathbf{x}^* uma aproximação para $\mathbf{y} = \mathbf{x}(t^*)$, $t^* \in I$, $t^* \neq t_0$. Vale que

$$\mathbf{y} - \mathbf{x}^* = \mathbf{J}\Psi(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\alpha}, \quad (3)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ é a solução de $\mathbf{J}\Psi(\mathbf{x}^*)\mathbf{J}\Psi(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\alpha} = \Psi(\mathbf{x}_0) - \Psi(\mathbf{x}^*)$.

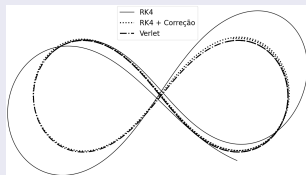


Figura: Uma das trajetórias em um problema de 3 corpos, integrado via RK4, VV e RK4 com correção.

Dispersão e evolução

O problema de N-corpos possui dois medidores de dispersão: o *momento de inércia* I e o *potencial* V , dados por

$$I = \frac{1}{M} \sum_{a < b} m_a m_b r_{ab}^2, \quad V = - \sum_{a < b} G \frac{m_a m_b}{r_{ab}}. \quad (4)$$

A *Relação de Lagrange-Jacobi* relaciona as duas medidas:

$$\ddot{I} = 4E - 2V. \quad (5)$$

Quando $E \geq 0$, tem-se $\ddot{I} \geq 0$, \dot{I} monótona crescente e I côncava para cima. A metade de \dot{I} é chamada *momento de dilatação*:

$$D := \frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{a=1}^N \langle \mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a \rangle. \quad (6)$$

O ponto de virada (mínimo) de I é chamado *Ponto de Janus*, e coincide com $D = 0$.

Complexidade e setas do tempo

De I e V definimos o *comprimento médio da raiz quadrada* $L_{rms} = \sqrt{I/M}$ e o *comprimento harmônico médio* $L_{mhl} = M^2/|V|$. A razão entre L_{rms} e L_{mhl} é chamada *complexidade*:

$$C_S := \frac{L_{rms}}{L_{mhl}} = \frac{|V|\sqrt{I}}{M^{5/2}}. \quad (7)$$

As direções de crescimento de C_S caracterizam setas do tempo, que podem ser medidas por $\tau = D/D_0$.

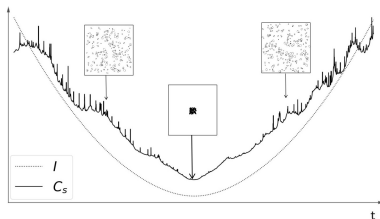


Figura: Complexidade e momento de inércia em um problema de 100 corpos.

Similaridade Dinâmica e Princípio de Mach-Poincaré

Definição (Similaridade Dinâmica)

O sistema definido das coordenadas $\rho_a(T) = \alpha r_a(T)$, $T = \alpha^{3/2}t$, é uma solução do problema de N-corpos dinamicamente equivalente a original.

Definição (Princípio de Mach-Poincaré)

A especificação de um ponto e uma direção ou de um ponto e um vetor tangente no espaço de formas S determina a evolução em S de forma única. (BARBOUR et al., 2014b)

Definição (Descrição objetiva)

A normalização

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{m_a}{I}} r_a, \quad \pi_a = \frac{1}{D_0} \sqrt{\frac{I}{m_a}} p_a - \tau \sigma_a,$$

chamadas *coordenadas* e *momentos de forma*, respectivamente, aplicam o Princípio de Mach-Poincaré.

Exemplo

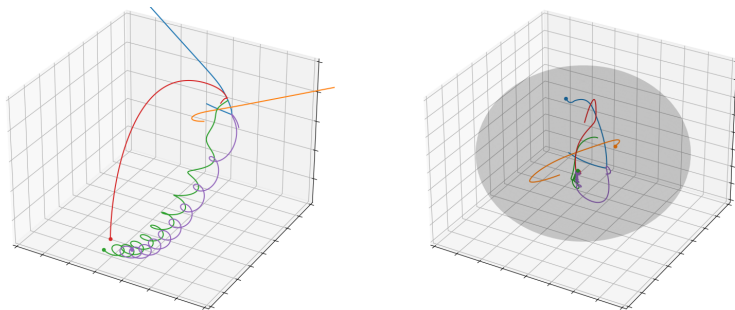


Figura: Uma simulação de 5 corpos. Na primeira imagem as trajetórias originais, na segunda as trajetórias no espaço de formas. As cores correspondem aos mesmos corpos nas duas imagens.

Referências



BARBOUR, Julian; KOSLOWSKI, Tim; MERCATI, Flavio. Identification of a Gravitational Arrow of Time. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 113, p. 181101, 18 out. 2014. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.181101. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.181101>.



_____. The solution to the problem of time in shape dynamics. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 31, n. 15, p. 155001, jul. 2014. DOI: 10.1088/0264-9381/31/15/155001. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/31/15/155001>.



BERTSEKAS, Dmitri Panteli. *Nonlinear Programming*. 3ed. Nashua: Athena Scientific, 2016.



HAIRER, Ernst; WANNER, Gerhard; LUBICH, Christian. *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2006. DOI: 10.1007/3-540-30666-8.



ROMA, Alexandre et al. *Métodos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias a valores iniciais*. São Paulo: Notas de aula, 2019.



VOLCHAN, Sérgio. *Uma Introdução à Mecânica Celeste*. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2007.